

学校编码: 10384

分类号_____密级_____

学号: B200314016

UDC _____

厦 门 大 学

博 士 学 位 论 文

随机二叉树期权定价模型及模拟分析

Random Binominal Option Pricing Model and Simulation

傅 德 伟

指导教师姓名: 吴 世 农 教授

专 业 名 称: 企 业 管 理

论文提交日期: 2008 年 5 月

论文答辩日期: 2008 年 月

学位授予日期: 2008 年 月

答辩委员会主席: _____

评 阅 人: _____

2008 年 5 月

厦门大学博硕士论文摘要库

厦门大学学位论文原创性声明

兹提交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：傅德伟

2008 年 5 月 8 日

厦门大学博硕士论文摘要库

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

- 1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。
- 2、不保密（☒）

（请在以上相应括号内打“√”）

作者签名： 傅德伟

日期： 2008年5月8日

导师签名： 吴世农

日期： 2008年5月8日

厦门大学博硕士论文摘要库

内容摘要

上个世纪七十年代以来金融衍生产品的发展,是金融史上影响最为深远、最激动人心的变化之一。过去二十多年来,金融衍生产品始终保持了旺盛的生命力。在众多的金融产品中,期权居于核心的地位。大量的结构化产品,如牛熊证、高息票据(ELN)、保本票据等,都包含了期权的成分。

自从期权交易产生以来,尤其是股票期权交易产生以来,大量学者一直致力于对期权定价问题的探讨。1973年,Fischer Black 和 Myron Scholes 提出了著名的 Black-Scholes 期权定价模型(简称 B-S 模型)。B-S 模型问世以来,在学术界和实务界引起强烈的反响,受到普遍的关注与好评,有的学者还对其准确性进行了多角度的检验。为了完善与发展 B-S 模型,很多研究对其进行了扩展。其中 Cox, Ross 和 Rubinstein (1979)提出的二叉树定价公式,简单并且直观,作为 B-S 模型的离散形式,得到了广泛应用。

本文以期权为对象,在全面综述已有期权研究方法的基础上,着重分析了期权定价的二叉树方法和三叉树方法,包括最近发展的模糊二叉树模型和模糊三叉树模型。然后在 CRR 二叉树定价模型基础上进行了一定的探索和创新。在现实的金融市场中,波动的异方差性广泛存在,即实际中的股票波动性不是确定的(异方差),而是随机的。在传统的二叉树模型中,代表股票上涨和下降的幅度参数 u 和 d 是事先就知道的固定参数,在整个 n 个时期中都保持不变,也就是说股票的波动性是保持不变的。实际上,当 n 很大时,即考虑的时间跨度比较大时,股票收益率的波动性不是固定的。为了将股票收益率的波动性是变化的这一情况反映到模型中,本研究将 u 和 d 考虑为随机变量,从而将期权的定价转化为计算一个随机变量数学期望的问题。在这样的思路下,模型中的随机参数按照不同的分布,就可以得到对应的期权定价。参数分布选择越接近真实,定价效果就越好。

为了得到具有真实含义和可以计算的期权定价公式,本文根据参数的特点和实际含义,假设二叉树参数服从一些特定的分布,包括 β 分布、正态分布等比较接近实际且能够计算的随机分布,然后通过复杂的数学计算,得到了这些随机分布下的二叉树期权定价公式。

(I) 在第一个随机参数二叉树定价模型中, 我们使用了 β 分布。根据模型中参数的实际意义, $\frac{d}{r}$ 和 $\frac{r}{u}$ 都是介于 0 和 1 之间的连续随机变量, 而 β 分布是那些介于 0 和 1 之间的比率的随机变量的最常用的假设分布之一, 因此我们假设 $\frac{d}{r}$ 和 $\frac{r}{u}$ 是独立随机变量且分别服从 $Beta(;\beta_1, \beta_2)$ 和 $Beta(;\alpha_1, \alpha_2)$ 的情况下, 经过详细论证, 我们得到的期权定价公式是:

$$C = \frac{S}{B(\alpha_1, \alpha_2)B(\beta_1, \beta_2)} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} [A(k) - C^* B(k)]$$

尽管 $A(k)$ 和 $B(k)$ 的形式非常复杂, 但由于这两个数列都是绝对收敛的, 因此在实际计算中可以采取近似估计, 而且这个公式是完全的离散形式 (表达式中没有积分), 可以比较快的通过计算机得到近似结果, 是一个可以在实际中应用的定价公式。

(II) 在第二个随机参数二叉树定价模型中, 我们使用了正态分布。由于模型中定义的新随机变量 $X^* = \ln\left(\frac{X}{1-X}\right)$ 和 $Y^* = \ln\left(\frac{Y}{1-Y}\right)$ 是 $-\infty$ 到 $+\infty$ 之间的连续随机变量, 因此假设了 X^* 和 Y^* 服从正态分布。在此假设下, 我们得到新的期权定价公式是:

$$C = \iint S \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (1 + e^{X^*} + e^{Y^*})^{-n} e^{kY^*} (1 + e^{X^*})^{n-k} \max\left[0, \frac{(1 + e^{-Y^*})^k}{(1 + e^{-X^*})^{n-k}} - C^*\right] f(X, Y) dX^* dY^*$$

(III) 在第三个随机参数二叉树定价模型中, 我们进一步假设无风险利率也是随机的, 并选取三变量正态分布进行计算, 得到的期权定价公式是:

$$C = \iiint S \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (1 + e^X + e^Y)^{-n} e^{kY} (1 + e^X)^{n-k} \max\left[0, \frac{(1 + e^{-Y})^k}{(1 + e^{-X})^{n-k}} - C^*\right] f(X, Y, Z) dX dY dZ$$

这些特定随机分布假设下的改进模型, 其解析解并无法直接计算, 需要通过数值计算方法才能得到具体的期权定价。本研究采用了数学中的 Hastings-Metropolis 算法和重要取样的 Monte-Carlo 数值积分方法, 就公式的实现问题进行了详细分析。

我们使用我国证券市场中的五粮液认购权证和认沽权证, 香港市场中瑞士银

行发行的建设银行权证的实际数据，采用 B-S 模型（由于本文考虑的模型是 n 很大时的情况，此时 CRR 二叉树定价和 B-S 公式定价是非常接近的）和 β 分布下的随机参数二叉树模型（公式 I）分别进行了模拟研究。结果发现：

第一，尽管 B-S 模型在数学形式上要比本文推导的随机参数二叉树模型简单，但实际定价效果看，两者相差不大。这表明 B-S 模型尽管看似假设多、形式简单，但实际上与随机形式下的定价结果很接近。B-S 模型形式简洁、计算简单、结果比较准确，应用面广，这也是三十多年来没有任何一个期权定价模型完全超越 B-S 模型的原因所在。

第二，对于五粮液认购权证和认沽权证，B-S 模型和本文推导的随机参数二叉树模型都相差很大，两个理论模型的结果与实际价格的模拟效果都很差。香港市场的建设银行权证中实际价格与理论价格相对比较接近。

第三，对于五粮液认沽权证，B-S 模型与随机参数二叉树模型模拟效果都较差，这并不能说明模型本身存在问题，主要是我国证券市场中认沽权证的非理性炒作造成权证价格极度偏离其内在价值。

本研究结合作者的工作实践，在拓展二叉树定价方法上进行了一定的探索。但限于水平和精力，模型还存在一些缺点和不足之处。从理论方法上看，作者先后尝试过几种可以考虑的，与现实比较接近的随机变量分布，但何种假设是更加接近真实的，这个问题没有得到很好的解答。从模型推导看，最终得到的公式比较复杂，在实际计算中需要高深的计算数学方法和较为复杂的编程来辅助解决。从实证研究的效果看，由于国内没有真正的期权，而权证由于数量少，价格被人为操控的迹象比较明显，与正股的关联度比较低，与成熟市场差别较大，使得实证研究的可靠性和可信性大大下降。随着我国未来推出真正的交易所期权，相信有了更多更好的实际市场数据，会对模型的检验和改进起到更好的效果。

关键词： 期权定价 随机二叉树模型 数值计算

厦门大学博硕士论文摘要库

Abstract

The emergence of financial derivatives in 1970s marked a most significant and exciting event in the history of finance. Over the past two decades, financial derivatives remain an exuberant vitality, of which, options play a key role. Considerable structural products such as bull-call warrants, equity linked notes (ELN), break-even notes have the elements of options.

Since the emergence of options trading, especially of securities options trading, researchers have been engaged in the studies of options pricing. In 1973, Prof. Fisher Black and Prof. Myron Scholes at the University of Chicago published “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, where they presented the well-known Black-Scholes model for options pricing (B-S model for short). Since its birth, the B-S model has received strong responses and universally high opinions. While certain researchers conducted thorough tests on the model’s accuracy, many others presented various opinions on the problems in the model and expanded the model for the purposes of improvement and extension. Sharp (1978) first proposed the at-the-money of call option prices by the up and down of share prices. Cox, Ross, Rubinstein (1979) obtained the pricing formula using binomial model, which has found wide applications.

This thesis concerns options. Based on a thorough review of the existed options research, we particularly examine the binomial and trinomial approaches for options pricing including the latest fuzzy binomial model. We then explore the binomial model with new ideas, which mainly involve the options pricing formula with binomial model whose parameters are modified from constants to random variables satisfying certain random distribution. In the classical CRR binomial model, the two parameters for shares up and down are fixed, which means the shares fluctuation in the continuous model remains unchanged. Since the shares fluctuation changes indeed, we try to represent the two parameters for shares up and down by random variables and to consider their random distribution close to reality, from which we derive some

new results.

In the traditional binomial model, the parameters of binomial distribution u and d are fixed parameters known in advance. Since u and d represent the margins for shares up and down respectively, the shares fluctuation would remain unchanged if u and d are unchanged within the entire n time intervals. In other words, the shares fluctuation is fixed in the traditional CRR-RB binomial model for options pricing. To reflect the changeable fluctuation of share yields in the model, we set u and d as random variables. Assume that the up parameter and down parameter are independent random variables satisfying beta distribution and that u , d and r satisfy 3-variable normal distribution, we investigate the analytic solutions of the new model, study the parameters estimation and Markov chain Monte Carlo, and compare the numerical methods and results.

Let d/r and r/u be independent random variables satisfying $Beta(., \beta_1, \beta_2)$ and $Beta(., \alpha_1, \alpha_2)$ respectively, we obtain the following options pricing formula:

$$C = \frac{S}{B(\alpha_1, \alpha_2)B(\beta_1, \beta_2)} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} [A(k) - C^* B(k)]$$

Although $A(k)$ and $B(k)$ are rather complicated, they may be approximately estimated in practical computation since the two series absolutely converge.

Under the assumption that $X^* = \dots$ and $Y^* = \dots$ satisfy normal distribution, we obtain the new options pricing formula as follows:

$$C = \iint S \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (1 + e^{X^*} + e^{Y^*})^{-n} e^{kY^*} (1 + e^{X^*})^{n-k} \max \left[0, \frac{(1 + e^{-Y^*})^k}{(1 + e^{-X^*})^{n-k}} - C^* \right] f(X, Y) dX^* dY^*$$

Since the above formula is very complicated, computational mathematics methods have to be employed in practical applications. We offer in-depth analysis on the implementation of the formula, adopting Hastings-Metropolis algorithm and Monte-Carlo numerical integration of importance sampling for computing the formula.

We finally verify our model using the data of the Five-Grain Liquor call warrant and put warrant in Chinese securities market. The result shows that the B-S model and random binomial model may both well simulate the call warrant, whose simulation

results differ little with both being basically identical at majority time points and each having its own advantages at minority time points. In the beginning stage of the call warrant, however, the simulation by random binomial model is good but by B-S model not. At most time points, the simulation of the put warrant by the B-S model and random binomial model are poor, which is due to the product features of put warrants and the crazy speculation by certain Chinese securities traders. Despite the poor simulation, the results by the B-S model and random binomial model are basically identical. The random binomial model is slightly better than the B-S model in simulation results.

This thesis has investigated the extension of binomial model for options pricing. The extended model needs to be further improved. In theoretical approach, we have tried several random variables distribution close to reality. It is to be determined which assumption is closer to reality. In model deduction, the derived formula is rather complicated requiring advanced computational mathematics and sophisticated computer programming for practical computation. In model verification, the reliability and credibility are significantly impaired by the facts that China has no options in real sense and that China's warrants are far from mature in few quantity, manipulated prices and low relativity with underlying securities. With the introduction of real options in China, more and better market data will be available benefiting the verification and improvement of our model.

Key Words: Options Pricing; Random Binomial Model; Numerical Computation

厦门大学博硕士论文摘要库

目 录

第一章 导言	1
一、研究背景	1
二、研究意义	4
三、研究内容与框架	5
四、本文的创新点	8
第二章 期权定价理论基础	10
第一节 布朗运动	11
第二节 Itô 积分与 Itô 过程	13
第三节 无套利原则	18
第四节 风险中性定价	20
第五节 等价鞅测度	21
第六节 小结	27
第三章 期权定价模型文献综述	29
第一节 B-S 及基于 B-S 的期权定价模型	29
第二节 蒙特卡罗定价模型	41
第三节 有限差分定价公式	46
第四节 二次逼近法	47
第五节 考虑流动性的期权定价	48
第六节 小结	57
第四章 二叉树期权定价模型及面临的问题	58
第一节 二叉树定价模型	58
第二节 三叉树定价模型	61
第三节 模糊二叉树模型和模糊三叉树模型	64
第四节 小结	71

第五章 基于随机参数的二叉树模型	72
第一节 引言	72
第二节 问题的提出	72
第三节 随机参数下的二叉树模型	74
第四节 小结	84
第六章 随机二叉树模型的数值计算方法与模拟分析	86
第一节 期权定价公式与参数的确定	86
第二节 公式的数值计算方法	87
第三节 模拟分析	92
第四节 小结	96
第七章 结论与展望	104
第一节 主要研究结论	104
第二节 不足与未来研究的方向	106
第三节 政策建议	106
附录一 部分程序设计算法和代码	108
附录二 模拟结果	116
参考文献	132
致谢	138

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库